Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа с.Гордино
Афанасьевского района Кировской области

Согласовано на педагогическом совете
МБОУ СОШ с. Гордино
Протокол № ______
«__»__________20__г

«Утверждаю»
Директор МБОУ СОШ с.Гордино
Гордина В.М. ______
Приказ № _____
От «___» _____________ 20__г

Рабочая программа элективного курса по математике «Решение текстовых задач» 10 класс

на 2022-2023 учебный год

Учитель:
Бузмакова Галина Вячеславовна

С. Гордино, 2022г

Пояснительная записка.

На экзаменах довольно часто предлагаются текстовые задачи. Навыки решения учащимися задач оставляют желать лучшего, о чем свидетельствуют результаты ЕГЭ. Одна из главных причин затруднений учащихся, что в школьных учебниках математические задачи ограничены одной темой и не предусматривают широких связей между различными разделами курса. Самостоятельный поиск метода решения учеником здесь минимальный. Общепризнано, что решение задач являются одним из основных средств математического развития и степенью подготовленности к последующей деятельности в любой сфере народного хозяйства и культуры. Также процесс воспитания осуществляется через каждую задачу. Одной из важнейших воспитывающих функций задач является формирование у школьников диалектико-материалистического мировоззрения. В процессе решения задач имеется возможность ярко продемонстрировать учащимся политехнических характер математики, её прикладную направленность. Ориентируя школьников на поиск красивых, изящных решений математических задач, учитель тем самым способствует эстетическому воспитанию учащихся и повышению их математической культуры. При решении задач следует учить учащихся наблюдать, пользоваться аналогией, индукцией, сравнениями и делать соответствующие выводы. Необходимо привить навыки не только логического рассуждения, но и прочные навыки эвристического мышления. Чтобы решить эти задачи, полезен элективный курс «Решение текстовых задач». Ребята должны испытать радость, почувствовать вкус к выполнению работы исследовательского характера. Отметим, что эффективное развитие математических способностей невозможно без решения нестандартных задач. Следует хорошо осознавать тот факт, что любая задача должна обязательно чему-нибудь научить учащихся. Учитель должен уметь находить интересные для учащихся задачи. Учитель должен научить четко различать четыре ступени:

1) понять задачу;

2) найти путь от неизвестного к известному;

3) реализовать решение от известного к неизвестному;

4) проверить решение.

Умелая помощь поможет находить путь к решению задач. Умение приобретается практикой. Система изучения способов решения поможет научиться решать задачи. При решении задач следует уделять внимание оформлению записи найденного решения. Запись должна быть четкой и полной. Огромна значимость нахождения нескольких способов решения. При этом формируется познавательный интерес, развиваются творческие способности, вырабатываются исследовательские навыки. Особое внимание следует обращать на решение задач арифметическим способом, так как это способствует развитию оригинальности мышления, изобретательности. Решая текстовые задачи учитель должен стремится к достижению двух целей. Первая – помочь, научить решать задачи; вторая – развить способности решить любую задачу самостоятельно. В настоящем курсе ставим целью рассмотреть все возможные способы решения задач.

Для эффективной реализации курса используются разнообразные формы, методы и приёмы обучения, делая особый упор на развитие самостоятельности, познавательного интереса и творческой активности учащихся. Для этой цели проводят :

1) уроки - лекции;
2) уроки- консультации;
3) самостоятельное решение типовых заданий;

Цели курса:

1. Расширение и углубление знаний по приобретению методов решения текстовых задач
2. Закрепление теоретических знаний и развитие практических навыков и умений.
3. Успешная сдача экзамена по математике в форме ЕГЭ.
4.Развитие логического мышления и вычислительных навыков.
5. Развитие графической культуры учащихся.

Задачи курса:

1. Формирование устойчивого интереса учащихся к предмету.
2. Выявление и развитие их математических способностей.
3. Ориентацию на профессии, существенным образом связанные с математикой.
4. Подготовку к обучению в ВУЗе.
5.Сформировать навыки решения задач повышенного уровня из заданий ЕГЭ.

Методические рекомендации по организации элективного курса.

Общая продолжительность работы по программе элективного курса «Решение текстовых задач» - 34 часа: 1 час в неделю. Продолжительность одного занятия - 45 мин. Изучение элективного курса «Решение текстовых задач» складывается из двух частей: теоретической, практической. Теоретическая часть элективного курса заключается в изложении материала преподавателем по каждой изучаемой теме с приведением примеров и сообщения учащимся дополнительных формул и теорем, не входящих в программу средней школы. Практическая часть элективного курса направлена на применение учащимися полученных знаний при решении задач.

Основные требования к знаниям и умениям учащихся.

В результате освоения программы курса учащиеся должны :

- знать порядок выполнения действий, уметь выполнять вычисления;
- знать что такое процент и уметь находить процент от числа;
- знать основные формулы движения и уметь применять их при решении задач;
- знать основные соотношения, используемые при решении задач на производительность;
- знать порядок решения задач с помощью уравнений и систем уравнений.
- знать основные допущения, отношения и формулы концентрации, процентного содержания и весового отношения, уметь применять их при решении задач;
- знать основные формулы по теме «Арифметическая прогрессия» и уметь применять их при решении задач.
- знать, что из себя представляют нестандартные задачи и способы их решения.

Программа предполагает развитие у учащихся навыков:

- исследовательского характера;
- логического рассуждения;
- эвристического мышления;
- вычисления значения выражения;

Тематическое планирование.

№ п/п	Тема занятия	Количество часов
1	Арифметические текстовые задачи.	2
2	Задачи на движение.	4
3	Задачи на работу.	4
4	Задачи на проценты.	5
5	Задачи, решаемые с помощью уравнений и систем уравнений.	4
6	Задачи, решаемые с помощью неравенств и систем неравенств.	3
7	Задачи на смеси и сплавы.	4
8	Задачи, решаемые с помощью арифметической прогрессии	3
19	Нестандартные задачи.	5
	ИТОГО	34

Учебно-тематический план курса.

<u>Содержание:</u>

1. Арифметические текстовые задачи. (2 часа)
Привить навыки решения задач «от конца к началу», подсчет среднего арифметического.

2. Задачи на движение. (4 часа)
Дать основные соотношения, которые используются при решении задач на движение. Рекомендовать составлять рисунок с указанием расстояний, векторов скоростей и других данных задач. Привить навыки решения всех типов задач на движение.

3. Задачи на работу. (4 часа)
Дать основные соотношения, используемые при решении задач на производительность. Рекомендовать составлять схемы-условия. Привить навыки решения таких задач при рассмотрении частей всей работы.

4. Задачи на проценты. (5 часов)
Дать основные соотношения, используемые при решении задач на проценты. Дать формулу «сложных процентов». Рекомендовать составлять таблицу-условие. Привить навыки решения задач на основании условия всевозможными способами.

5. Задачи, решаемые с помощью уравнений и систем уравнений. (4 часа)
Сформировать требование «естественности» неизвестных. Приучить к стандартному обозначению неизвестных. Привить навыки создания математической модели ситуации и ее решения. Научить делать проверку по условиям задачи.

6. Задачи, решаемые с помощью неравенств и систем неравенств. (3 часа)
Дать основное соображение при выборе неизвестных, обратив внимание на необходимость прослеживания использования всех данных и условий в процессе перевода условий задачи в неравенство или систему неравенств. Показать, что необходимо следить за тем, чтобы вычисления не приводили к результатам, противоречащим физическому смыслу. Привить навыки идей и приемов решения.

7. Задачи на смеси и сплавы. (4 часа)
Преодолеть психологические трудности, связанные с нечетким пониманием химических процессов, показав, что никаких химических процессов, влияющих на количественные соотношения задачи, не происходит. Дать основные допущения, отношения и формулы концентрации, процентного содержания и весового отношения. Рекомендовать запись условия с помощью таблицы. Привить навыки решения таких задач.

8.Задачи, решаемые с помощью арифметической прогрессии. (3 часа)
Дать основные формулы, которые используются при решении задач. Привить навыки создания математической модели ситуации и ее решения. Рассмотреть примеры решения задач. Привить навыки решения таких задач. Научить делать проверку по условиям задачи.

9. Нестандартные задачи. (5 часов)
Дать понятие нестандартных задач и приемы их решения. Рассмотреть примеры решения нестандартных задач.

Тематическое планирование

№ п/п	Тема урока	К-во часов	Характеристика деятельности учащихся или виды учебной деятельности	Планируемые результаты освоения материала	Дата проведения	
					план.	факт.
1	2	3	5	7	9	10
1	Арифметические текстовые задачи	1	Рассмотрение примеров решения задач. Решение задач	**Знать** как решаются задачи «от конца к началу», как находится среднее арифметическое. **Уметь** решать задачи методом от конца к началу, находить среднее арифметическое нескольких чисел.		
2	Арифметические текстовые задачи	1	Решение задач			
3	Задачи на движение.	1	Ознакомление с теорией решения задач на движение.	**Знать** основные соотношения, которые используются при решении задач на движение, знать как составляется рисунок с указанием расстояний, векторов скоростей и других данных задач. **Уметь** решать все типы задач на движение.		
4	Решение задач на движение по реке	1	Решение задач			
5	Решение задач на встречное движение.	1	Решение задач			
6	Решение задач на движение за впереди движущимся телом	1	Выполнение самостоятельной работы			
7	Задачи на работу.	1	Ознакомление с теорией решения	**Знать** формулу работы, понятие производитель-		

			задач на работу.	ность, правила решения задач на работу. **Уметь** составлять таблицу, уравнение, находить неизвестные величины из формулы работы, исключать корни уравнения не удовлетворяющие смыслу задачи		
8	Решение задач на совместную работу	1	Ответы на вопросы. Решение задач.			
9	Решение задач на совместную работу	1	Повторение основных понятий. Решение задач.			
10	Решение задач на работу. Заполнение бассейна.	1	Выполнение самостоятельной работы			
11	Задачи на проценты.	1	Ознакомление с теорией решения задач на проценты.	**Знать** определение процента, как находится процент от числа, число по проценту, формулу «сложных процентов». **Уметь:** - записывать десятичные дроби в виде процентов и наоборот; - находить несколько процентов от величины; - величину по ее проценту; - составлять таблицу.		
12	Решение задач на проценты. Нахождение числа по его процентам.	1	Ответы на вопросы.Решение задач.			
13	Решение задач на проценты. Нахождение процентного отношения.	1	Решение задач			
14	Решение задач на проценты. Сложные задачи на проценты.	1	Решение задач			
15	Решение задач на проценты. Сложные задачи на проценты.	1	Решение задач, подготовка к контрольной работе			
16	Задачи, решаемые с помощью уравнений и систем уравнений.	1	Ознакомление с теорией решения задач с помощью уравнений и систем уравнений	**Знать** как создается математическая модель ситуации, способы решения уравнений и систем уравнений. **Уметь** решать уравнения и системы уравнений, научить делать проверку по условиям задачи.		
17	Задачи, решаемые с помощью уравнений и систем уравнений.	1	Ознакомление с теорией решения задач с помощью уравнений и систем уравнений			
18	Задачи, решаемые с помощью уравнений и систем уравнений.	1	Ответы на вопросы. Решение задач.			

19	Задачи, решаемые с помощью уравнений и систем уравнений.		Выполнение самостоятельной работы			
20	Задачи, решаемые с помощью неравенств и систем неравенств.	1	Ознакомление с теорией решения задач с помощью неравенств и систем неравенств	**Знать** процесс перевода условий задачи в неравенство или систему неравенств, порядок решения неравенств и систем неравенств. **Уметь** решать неравенства и системы неравенств, выделять корни не удовлетворяющие смыслу задачи		
21	Задачи, решаемые с помощью неравенств и систем неравенств.	1	Ответы на вопросы. Решение задач.			
22	Задачи, решаемые с помощью неравенств и систем неравенств.	1	Выполнение самостоятельной работы			
23	Задачи на смеси и сплавы	1	Ознакомление с теорией решения задач смеси и сплавы.	**Знать** понятие концентрации вещества, процентного раствора, закон сохранения массы, основные допущения, отношения и формулы концентрации, процентного содержания и весового отношения, запись условия с помощью таблицы **Уметь** находить процентное содержание вещества в растворе, находить необходимое количество жидкости для получения раствора и смеси определенного процента		
24	Задачи на смеси и сплавы.	1	Ответы на вопросы. Решение задач.			
25	Задачи на смеси и сплавы.	1	Решение задач			
26	Задачи на смеси и сплавы.	1	Выполнение самостоятельной работы			
27	Задачи, решаемые с помощью арифметической прогрессии	1	Повторение основных формул. Рассмотрение примеров решения задач с помощью арифметической прогресссии	**Знать** основные формулы по по теме арифметическая □прогресссия, как создается □р- тематическая модель ситуации и процесс ее решения. **Уметь** находить n-й член арифметической про-		

28	Задачи, решаемые с помощью арифметической прогрессии	1	Решение задач	гресссии, сумму n-первых членов арифметической □прогресссии, делать проверку по условиям задачи.		
29	Задачи, решаемые с помощью арифметической прогрессии	1	Выполнение самостоятельной работы			
30	Нестандартные задачи.	1	Ознакомление с теорией решения нестандартных задач.	**Знать** понятие нестандартных задач и приемы их решения. **Уметь** решать нестандартные задачи, использовать наиболее рациональные способы, выделять корни не удовлетворяющие условиям задачи.		
31	Нестандартные задачи.	1	Ответы на вопросы. Решение задач.			
32	Нестандартные задачи.	1	Решение задач			
33	Нестандартные задачи.	1	решение задач.			
34	Итоговое занятие					

Лекция №1

Понятие тестовой задачи

В обучении математике велика роль текстовых задач. Текстовая задача – есть описание некоторой ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения. Решение задач – это работа несколько необычная, а именно умственная работа. А чтобы научиться какой-либо работе, нужно предварительно хорошо изучить тот материал, над которым придётся работать, те инструменты, с помощью которых выполняется эта работа. Значит, для того чтобы научиться решать задачи, надо разобраться в том, что собой они представляют, как они устроены, из каких составных частей они состоят, каковы инструменты, с помощью которых производится решение задач. Каждая задача – это единство условия и цели. Если нет одного из этих компонентов, то нет и задачи. Это очень важно иметь в виду, чтобы проводить анализ текста задачи с соблюдением такого единства. Это означает, что анализ условия задачи необходимо соотносить с вопросом задачи и, наоборот, вопрос задачи анализировать направленно с условием. Их нельзя разрывать, так как они составляют одно целое. Математическая задача – это связанный лаконический рассказ, в котором введены значения некоторых величин и предлагается отыскать другие неизвестные значения величин, зависимые от данных и связанные с ними определенными соотношениями, указанным в условии. Любая текстовая задача состоит из двух частей: условия и требования (вопроса). В условии соблюдаются сведения об объектах и некоторых величинах, характеризующих данные объекта, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними. Требования задачи – это указание того, что нужно найти. Оно может быть выражено предложением в повелительной или вопросительной форме («Найти площадь треугольника.» или «Чему равна площадь прямоугольника?») Рассмотрим задачу: На тракторе «Кировец» колхозное поле можно вспахать за 10 дней, а на тракторе «Казахстан» – за 15 дней. На вспашку поставлены оба трактора. За сколько дней будет вспахано это поле? В задаче пять неизвестных значений величин, одно из которых заключено в требовании задачи. Это значение величины называется искомым. Иногда задачи формируются таким образом, что часть условия или всё условие включено в одно предложение с требованием задачи. В реальной жизни довольно часто возникают самые разнообразные задачные ситуации. Сформулированные на их основе задачи могут содержать избыточную информацию, то есть, такую, которая не нужна для выполнения требования задачи. На основе возникающих в жизни задачных ситуаций могут быть сформулированы и задачи, в которых недостаточно информации для выполнения требований. Так в задаче: «Найти длину и ширину участка прямоугольной формы, если известно, что длина больше ширины на 3 метра» – недостаточно данных для ответа на её вопрос. Чтобы выполнить эту задачу, необходимо её дополнить недостающими данными. Одна и та же задача может рассматриваться как задача с достаточным числом данных в зависимости от имеющихся и решающих значений. Рассматривая задачу в узком смысле этого понятия, в ней можно выделить следующие составные элементы:

1. Словесное изложение сюжета, в котором явно или в завуалированной форме указана функциональная зависимость между величинами, числовые значения которых входят в задачу.
2. Числовые значения величин или числовые данные, о которых говорится в тексте задачи.
3. Задание, обычно сформулированное в виде вопроса, в котором предлагается узнать неизвестные значения одной или нескольких величин. Эти значения называют искомыми.

Виды арифметических задач

Задачи бывают *простые* и *составные*. *Простая задача* решается в одно действие, и ее условие уже содержит все числа, которые, будучи объединены в числовом выражении арифметическими знаками, дадут ответ на вопрос задачи.

Составные задачи — это задачи, которые для ответа на поставленный вопрос требуют нескольких действий.

Правило. Для решения любой задачи необходимо:

- — ознакомиться с ее условием
- — определить для себя ключевые слова условия задачи
- — проанализировать известные и неизвестные величины по условию задачи, определить их связь между собой (составить краткую схему условия задачи)
- — определить порядок решения задачи, исходя из поставленного вопроса (задайте себе два вопроса «что надо найти?» И «как это можно найти?»)
- — определить конкретный ход решения задачи (составить устно или письменно план решения), правила и законы, по которым производится вычисление
- — проверить правильность вычислений одним из арифметических действий или сравнить с ответом в задачнике.

Подсказка. Все приведенные в условии задачи числа должны быть использованы для ее решения.

Все арифметические задачи можно разделить на пять типов:

1. задачи общего содержания
2. задачи геометрического содержания
3. задачи на движение
4. задачи на совместную работу или производительность
5. задачи на проценты

Обратная задача — это такая задача, где неизвестное предыдущей задачи — известно, а известное — вынесено в вопрос. Часто такие задачи предполагают использование основных законов и свойств арифметических действий.

Составная задача включает в себя ряд простых задач, связанных между собой так, что искомые одних простых задач служат данными других. Решение составной задачи сводится к расчленению её на ряд простых задач и к последовательному их решению. Таким образом, для решения составной задачи надо установить систему связей между данными и искомым, в соответствии с которой выбрать, а затем выполнить арифметические действия.

Рассмотрим в качестве примера задачу: «В школе дежурили 8 девочек, а мальчиков на 2 больше. Сколько детей дежурило в школе?».

Эта задача включает 2 простых:

1. В школе дежурили 8 девочек, а мальчиков на 2 больше. Сколько мальчиков дежурило в школе?

2. В школе дежурили 8 девочек и 10 мальчиков. Сколько всего детей дежурило в школе?

Как видим, число, которое было искомым в первой задаче, стало данным во второй.

Последовательное решение этих задач является решением составной задачи:

1) $8 + 2 = 10$; 2) $8 + 10 = 18$.

Запись решения многих составных задач и составление по ним выражения связаны с использованием скобок. Скобки – математический знак, употребляемый для порядка действий. В скобки заключается то действие, которое нужно выполнить раньше.

Лекция №2

Решение задач на движение

Предположим, вы неплохо поняли, как решать задачи по математике. Умеете выкачивать всю спрятанную информацию из задачи и записывать её в виде математических выражений с иксом. Но задачки на движение – не идут… Ну не хватает информации, и всё тут! Почему? А вот почему! Для успешного ***решения задач на движение*** нужно кое-что твёрдо держать в голове. А именно – формулу-ключ, в которой связаны путь, время и скорость. В любой задаче дают кучу информации, но эту формулу – никогда! Это должно быть *ваше* знание! Кстати, эта формула нужна и в компетентностных задачах, и в обыденной жизни. Чтобы эту формулу-ключ хорошо и осмысленно запомнить, достаточно ответить самому себе на простой вопрос: «Если я еду со скоростью 60 километров в час, какое расстояние я проеду за 2 часа?». Очевидно, умножив 60 на 2, получим 120 километров. Вот вы и запомнили нехитрую формулу скорости, пути, времени:

$$S = V \cdot t$$

S - это пройденный путь, или расстояние,
V – скорость движения,
t – время движения.
Всё. Это *вся* посторонняя информация (из физики), которая необходима для решения задач на движение. Всё остальное – в тексте задачи.
Зная эту формулу (для расстояния), вы можете легко вывести из неё формулу для скорости, или времени. Ведь эта формула – тоже уравнение. Стало быть, к ней применимы тождественные преобразования. Если нас интересует не путь, а скорость – поделим обе части формулы на t, получим:

$V=S/t$ Если интересует время, делим на V: $t = S/V$ Запомнили? Если считать задачу замком, то эти формулы – ключи, который должен быть всегда при вас. Ибо без ключа замок открывать неудобно…Что нам даёт этот ключ? Он нам даёт дополнительную информацию! Которой, как раз, и не хватает. Скажем, в задаче даны скорость и расстояние. А нам позарез нужно время. Так найти время из формулы-ключа за 6 секунд можно! То есть, можно считать, что время тоже дано. Если формулу-ключ помните. И вообще, если даны любые две величины из формулы, можно считать, что и третья величина известна. Итак, задача.
«В 10:00 туристы на лодке поплыли из пункта А вниз по течению реки. Пройдя 12 километров, туристы остановились для отдыха на 3 часа. Затем они вернулись в пункт А в 18:00. Определить (в км/час) собственную скорость лодки, если скорость течения реки 1 км/час».

Будем разбирать (и решать!) задачу по шагам.

Шаг первый.
Осмысливаем задачу. Это, понятно, задача на движение. Выясняем, всё ли нам понятно в тексте. Сомнения может вызвать выражение «собственная скорость лодки». Что это такое? После десяти секунд глубоких размышлений соображаем, что по течению лодка плывёт быстро, а против течения – медленно. Ну, если грести одинаково, естественно… Значит, всё честно. Собственная скорость – это скорость лодки сама по себе. Безо всяких течений. Иногда так и пишут: найти скорость лодки в стоячей воде.
Всё остальное, вроде, понятно и логично.
Шаг второй.
Нужно что-то взять за икс. Что брать за икс? В простых задачах за икс, чаще всего, можно брать *вопрос задачи*. Вот чего надо узнать в задаче, вот это и будет иксом! Иногда вопрос задачи просто неудобно брать за икс. Например, в этой задачке вопрос мог быть поставлен так: *«**На сколько** скорость лодки больше скорости течения реки?»*. Брать этот вопрос за икс неудобно, куда проще найти скорость лодки, а потом отнять от неё скорость реки. То есть, появится одно дополнительное действие, которое потом надо не забыть сделать! Но! Если вы не знаете, что брать за икс, берите вопрос задачи! Работайте с этим неизвестным, а если ничего не выходит, уж тогда попробуйте взять что-нибудь другое. С практикой придёт понимание. И вопрос, что брать за икс, будет вам казаться смешным… Итак, аккуратно записываем:
х – собственная скорость лодки.
Шаг третий.
Расписываем текст задачи в математическом виде. Это гордо называется составлением математической модели! Вот просто читаем задачу, и *всё, что можем, всю информацию* из задачи записываем формулами с описанием. По порядку, вразброс, как угодно! Начиная с информации, в которой уверены железно. Прочитайте ещё раз текст задачи. Даже толком не разобравшись во всех этих временах и расстояниях, можно железно выцарапать из условия бесспорную математическую информацию:

Если
х – скорость лодки,
то
х+1 – скорость лодки по течению,
а
х-1 – скорость лодки против течения.
Ну вот, начало положено! Возможно, это и не пригодится, но часть информации мы с задачи скачали!
Опять читаем задачу. Из первого предложения записать ничего нельзя. А вот во втором есть зацепка. Это слова: «*Пройдя 12 километров, туристы остановились …»*. Тут надо вспомнить про ключевую формулу скорости! Путь у нас есть, - это 12 км, скорость лодки по течению есть, - это *х+1 км, что можно найти? Правильно, время! Если мы знаем путь и скорость, то*

мы знаем и время. Вспоминая, что t = S/V, можно записать время лодки по течению. Это будет

$$\frac{12}{x+1}$$

Так и пишем:
12/(x+1) – время лодки по течению.
Ну и сразу, до кучи, пишем:
12/(x-1) – время лодки против течения.
Ещё раз обращаю ваше внимание на один интересный момент. Возможно, мы даже не знаем, нужно нам это время по течению, против течения… Но мы упорно и въедливо выкачиваем ***всю*** возможную информацию из текста задачи! ***Снова читаем задачу***. Про лодку мы уже всё *как бы* знаем. С какой скоростью она плыла туда, обратно, сколько времени затратила. Из условий задачи мы пока никак не использовали информацию по временам. Что ж, займёмся временами. Знаем время выхода лодки и время возвращения. Что можно выяснить из этих данных? Верно! Время всего путешествия!
18 – 10 = 8. Общее время 8 часов. Из чего складывается это время? Время на дорогу туда, это у нас *12/(x+1)*, стоянка, это у нас 3 часа, и время на дорогу обратно, это у нас *12/(x-1)*. Вот и всё. Всё, потому что осталось просто записать уравнение.

Шаг четвёртый.
Записываем уравнение:

$$\frac{12}{x+1}+3+\frac{12}{x-1}=8$$

Вот так составилось уравнение. Осталось его решить – и заслуженные баллы – в кармане. *x = 5км/час*.
В процессе *решения задач на движение* вы можете столкнуться с неожиданным фактом. Дробное уравнение после преобразований может (как здесь) стать квадратным. И будет иметь два корня! Два правильных (*для уравнения*) ответа. Какой ответ брать? Тот, который *логичен для задачи.* Второй корень будет отрицательным. Что никак не стыкуется ни с лодкой, ни с задачей. Мы его просто назовём посторонним и выбросим. Такое бывает сплошь и рядом.
Внимательно следите, чтобы в задаче все данные измерялись одними величинами! Если уж километры – то и все пути, расстояния должны быть в километрах, а не сантиметрах или верстах. Если часы – то везде часы, а не минуты или сутки! Прикиньте, если в этой задаче стоянка будет дана в минутах – 180 минут? Если в уравнение вставить 180 (минут) вместо 3 (часов), всё пойдёт наперекосяк. Надо всё приводить к единым единицам измерений.

И ещё один полезный совет. При решении задач на движение, рисуйте картинки. Особенно, когда текст задачи большой и сразу в голове не укладывается. Чаще всего это нужно делать в задачах, где кто-то кого-то догоняет, встречается, или болтается между пунктами А и В туда и обратно… Рисуем пункты А и В, отмечаем точки встречи, остановок и т.п. На картинке сразу видно, какие отрезки пути можно просчитать. Картинка реально облегчает составление математической модели.
Итак, при решении задач на движение, используйте

Практические советы:
1. Записываем формулу-ключ: $S = Vt$
2. Определяемся с иксом, расписываем через икс все данные. Особое внимание на величины, входящие в формулу-ключ: *путь, скорость, время.* Эти величины – основа решения задач на движение. Стараемся снять ***всю*** возможную информацию с задачи. 3. До составления уравнения, приводим (если надо) все величины задачи к единым единицам измерения.
4. Записываем уравнение. Если никак не записывается, читаем задачу. Скорее всего, вы использовали не все данные из задачи или не увидели в тексте подсказки. Она, подсказка, *всегда* есть.
5. Решаем уравнение. При получении двух корней – за ответ берём приличный корень, несусветный и левый – отбрасываем.

Лекция №3

Задачи на работу

К этой группе задач относятся задачи, в которых говорится о трех величинах: работе A, времени t, в течение которого производится работа, производительности P – работе, произведенной в единицу времени. Эти три величины связаны с уравнением A=P* t. К задачам на работу относят и задачи, связанные с наполнением и опорожнением резервуаров (сосудов, баков, бассейнов и т.п.) с помощью труб, насосов и других приспособлений. В качестве произведенной работы в этом случае рассматривают объем перекачанной воды.
Задачи на работу, вообще говоря, можно отнести к группе задач на движение, так как в задачах такого типа можно считать, что вся работа или объем резервуара играют роль расстояния, а производительности объектов, совершающих работу, аналогичны скоростям движения. Однако по фабуле эти задачи естественным образом различаются, причем часть задач на работу имеют свои специфические приемы решения. Так, в тех задачах, в которых объем выполняемой работы не задан, вся работа принимается за единицу.

Пример 1. *Две бригады должны были выполнить заказ за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, поэтому вторая бригада заканчивала выполнение заказа еще 7 дней. За сколько дней могла бы выполнить заказ каждая из бригад, работая отдельно.*
Р е ш е н и е. Пусть первая бригада выполняет задание за x дней, вторая бригада – за y дней. Примем всю работу за единицу. Тогда 1/x – производительность первой бригады, а 1/y – второй. Так как две бригады должны выполнить заказ за 12 дней, то получим первое уравнение
12(1/x+ 1/y)=1
Из второго условия следует, что вторая бригада работала 15 дней, а первая - только 8 дней. Значит, второе уравнение имеет вид
8/x+15/y=1
Таким образом, имеем систему: 12/x+12/y=1, 8/x+15/y=1
Вычтем из второго уравнения первое, получим: 21/y=1 ? y=21. Тогда 12/x+12/21=1 ? 12/x=3/7 ? x=28.
О т в е т: за 28 дней выполнит заказ первая бригада, за 21 день – вторая.
Пример 2. *В бассейн проведены две трубы – подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую вода из бассейна выливается. При заполненном на одну треть бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов через одну первую трубу может наполниться бассейн, и за сколько времени через одну вторую трубу может осушиться полный бассейн?*
Р е ш е н и е: Пусть V $м^3$ – объем бассейна, x $м^3$ /ч – производительность подающей трубы, y $м^3$ /ч - отводящей. Тогда V/x ч – время, необходимое подающей трубе для заполнения бассейна, V/y ч – время, необходимое отводящей на осушение бассейна. По условию задачи

$V/x - V/y=2$.
Так как производительность отводящей трубы больше производительности наполняющей, то при включенных обеих трубах будет происходить осушение бассейна и одна треть бас-сейна осушится за время $(V/3)(y-x)$, которое по условию задачи равно 8 ч. Итак, условие задачи может быть записано в виде системы двух уравнений с тремя неизвестными:
В задаче необходимо найти V/x и V/y. Выделим в уравнениях комбинацию неизвестных V/x и V/y, записав систему в виде: $V/x-V/y=2$, $V/(y-x)=24$ или $V/x-V/y=2$, $y/V-x/V=1/24$

Вводя новые неизвестные $V/x=a$ и $V/y=b$, получаем следующую систему: $a-b=2$, $1/b-1/a=1/24$
Подставляя во второе уравнение выражение $a=b+2$, имеем уравнение относительно b: $1/b-1/(b+2)=1/24$
решив которое найдем $b_1=6$, $b_2=-8$. Условию задачи удовлетворяют первый корень $b_1=6$(ч). Из первого уравнения последней системы находим $a=8$(ч), т.е. первая труба наполняет бассейн за 8ч.
О т в е т: через первую трубу бассейн наполнится через 8 ч, через вторую трубу бассейн осушится через 6 ч.
Пример 3. *Одна тракторная бригада должна вспахать 240 га, а другая на 35% больше, чем первая. Первая бригада, вспахивая ежедневно на 3 га меньше второй, закончила работу на 2 дня раньше, чем вторая бригада. Сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно?*
Р е ш е н и е. Найдем 35% от 240 га: 240 га ? 35%/100%=84 га.
Следовательно, вторая бригада должна была вспахать 240 га+84 га=324 га.
Пусть первая бригада вспахивала ежедневно x га. Тогда вторая бригада вспахивала ежедневно $(x+3)$ га; $240/x$ – время работы первой бригады; $324/(x+3)$ – время работы второй бригады. По условию задачи первая бригада закончила работу на 2 дня раньше, чем вторая, поэтому имеем уравнение
$324/(x+3)-240/x=2$
которое после преобразовании можно записать так: $324x-240x-720=2x^2+6x$

$2x^2-78x+720=0$

$X^2-39x+360=0$
Решив квадратное уравнение, находим $x_1=24$, $x_2=15$. Это норма первой бригады. Следовательно, вторая бригада вспахивала в день 27 га и 18 га соответственно. Оба решения удовлетворяют условию задачи.
О т в е т: 24 га в день вспахивала первая бригада, 27 га – вторая; 15 га в день вспахивала первая бригада, 18 га – первая.

Лекция №4

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

При решении задач на проценты необходимо хорошо уяснить для себя соответствие между увеличением (уменьшением) на данное число процентов и увеличением (уменьшением) в данное число раз. Надеюсь, Вам поможет в этом следующие примеры.

Число:	Значит оно:
25% числа А	0,25А
340% числа А	3,4А
Увеличилось на 20%	Увеличилось в 1,2 раза
Увеличилось на 60%	Увеличилось в 1,6 раза
Увеличилось на 100%	Увеличилось в 2 раза
Увеличилось на 230%	Увеличилось в 3,3 раза
Уменьшилось на 70 %	Увеличилось в 0,3 раза
Уменьшилось на 10%	Увеличилось в 0,9 раза

Теперь перейдем непосредственно к разбору задач.

Пример 1.Определите первоначальную стоимость продукта, если после подорожания соответственно на 120%, 200% и 100% его конечная стоимость составила 264 р.

Решение: Пусть первоначальная стоимость продукта – А. После подорожания на 120% она стала составлять 2,2А, после подорожания на 200% она стала 3*2,2А, и наконец после подорожания на 100% она стала составлять 2*3*2,2А=13,2А. Имеем уравнение 13,2А=264, значит А=20 р.

Пример 2.Цена некоторого товара увеличилась на 20%, а затем снизилась на 20%. На сколько в итоге изменилась стоимость товара ?

Решение: Пусть первоначальная цена товара равна А рублей. После повышения на 20% она стала равняться 1,2А, а после понижения – 0,8*1,2А, т.е. 0,96А. Итак, товар вначале стоил А рублей, а в конце – 0,96А, значит его стоимость снизилась на 4%. (Как изменился бы ответ, если бы товар вначале подешевел на 20%, а затем подорожал на 20% ?) Замечание – можно было считать, что товар вначале стоил 100 единиц (не обязательно рублей), тогда после повышения он стал стоить 120 единиц. А после понижения – 96 единиц. Значит, стоимость снизилась на 4%.

Пример 3. Цена на товар была повышена на 25 %. На сколько процентов ее надо снизить, чтобы получить первоначальную цену товара ?

Решение: Пусть товар вначале стоил А рублей. После повышения он стал стоить 1,25А. На сколько надо умножить данное число, чтобы опять получилось А ? Конечно, на 0,8. Значит, цену на товар необходимо понизить на 20%.

Пример 4. Первое число равно 0,6, а второе 0,2. Сколько процентов первое число составляет от суммы этих чисел ?

Решение: надо найти, сколько будет 0,6 от 0,8. Легко это сделать из пропорции:

0,8 – 100%

0,6 – Х%, откуда Х=0,6*100/0,8=75 %

Пример 5. К 1,5 кг 10% раствора соли добавили 2,5 кг 16% раствора этой же соли. Найти концентрацию соли в смеси.

Решение: Масса итоговой смеси составляет 4 кг. Чистая соль в итоговой смеси получается в результате объединения чистой соли ир первого и второго растворов. В первом растворе чистой соли будет 0,1*1,5=0,15 кг, а во втором растворе – 0,16*2,5=0,4 кг. Всего получили 0,55 кг чистой соли в смеси массой 4 кг. Процентное содержание этой соли в смеси найдем из пропорции:

4 кг – 100%

0,55 кг – Х%, откуда Х = 0,55*100/4=13,75%.
Внимательно продумайте данную задачу. Во многих задачах применяют один и тот же прием – **рассматривают массу чистого вещества**.

Пример 6. Сколько килограммов воды нужно добавить к 20 кг 5% раствора соли в воде, чтобы получить 4% раствор ?
Решение: Чистой соли в первоначальном растворе будет 0,05*20=1 кг.

Столько же чистой соли будет и в новом растворе, поскольку добавлялась лишь вода. Массу всего раствора найдем из пропорции:

1 кг – 4%

X кг – 100%,

значит, масса всего раствора равна 100/4 = 25 кг, т.е. добавили 5 кг воды.

Пример 7. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие 20% воды. Сколько фруктов получится из 20 кг свежих ?

Решение: Чистого вещества в свежих фруктах будет 28%, т.е. 0,28*20=5,6 кг. В сухих фруктах сухого вещества будет столько же, поскольку масса уменьшается за счет потери воды, и составит 80%. Массу сухих фруктов можно найти из пропорции:

5,6 кг – 80%

X кг - 100%,

значит, X=5,6*100/80=7 кг.

Пример 8. К 20 кг 4 % раствора соли в воде добавили 30 кг 5% раствора, а затем 8 % воды выпарили. Найти концентрацию соли в полученном растворе.

Решение: Запишем все вычисления в таблицу

	Масса	Чистая соль	Вода
1 раствор	20	0,04*20=0,8	0,96*20=19,2
2 раствор	30	0,05*30=1,5	0,95*30=28,5
итог	20+30=50	0,8+1,5=2,3	19,2+28,5=47,7
Выпаривание	-3,8		-0,08*47,7 $\approx -3,8$
Итог	50-3,8=46,2	2,3	43,9

Теперь из нижней строчки можно найти концентрацию соли в полученном растворе:

46,2 кг – 100%

2,3 кг - X%,

откуда X=2,3*100/46,2=5%. Значение приближенное, поскольку при подсчете выпаренной воды точное значение было заменено приближенным. Не переводя дробные числа в десятичную запись, найдите точное значение.

Пример 9. Из двух сплавов с 60% и 80% содержанием меди требуется получить 40 кг сплава с 75% содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава следует взять ?

Решение: Решим задачу, используя таблицу.

	масса	медь	Примесь
1 сплав	X	0,6*X	0,4*X
2 сплав	40-X	0,8*(40-X)	0,2*(40-X)
Итог	40	0,6*X+0,8*(40-X)	0,4*X+0,2*(40-X)

Поскольку в итоговом сплаве меди содержится 75%, то получим уравнение

0,6*X+0,8*(40-X)=0,75*40. Решим его.

0,6*X+32-0,8*X=30

-0,2*X=-2

X=10. Итак, 1 сплава нужно взять 10 кг, а второго 30 кг.

Пример 10.Один сплав меди с оловом содержит эти металлы в отношении 2:3, а другой – в отношении 3:7. В каком количестве необходимо взять эти сплавы, чтобы получить 12 кг нового сплава, в котором медь и олово содержались бы в отношении 3:5 ?

Решение: Решение задачи аналогично предыдущей. Так отношение 2:3 можно интерпретировать, что одна часть составляет 40%, а вторая – 60%.

	масса	медь	олово
1 сплав	X	0,4*X	0,6*X
2 сплав	12-X	0,3*(12-X)	0,7*(12-X)
Итог	12	0,4*X+0,3*(12-X)	0,6*X+0,7*(12-X)

Имеем уравнение: (0,4*X+0,3*(12-X))/(0,6*X+0,7*(12-X))=3/5. Решим его.

(3,6+0,1*X)/(8,4-0,1*X)=3/5

5*(3,6+0,1*X)=3*(8,4-0,1*X)

18+0,5*X=25,2-0,3*X

0,8*X=7,2

X=9

Итак, 1 сплава необходимо взять 9 килограмм. А второго – 3 килограмма.

Другое решение можно получить, если записать уравнение для массы меди в итоговом сплаве: $\frac{2}{5} \cdot X + \frac{3}{10} \cdot (12 - X) = \frac{3}{8} \cdot 12$

Лекция №5

Решение задач с помощью уравнений и систем уравнений

Уравнением с одной переменной (уравнением с одной неизвестной) называют равенство, содержащее одну переменную.
Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение превращается в верное равенство.
Решить уравнение - значит найти все его корни или доказать, что корней нет.
Уравнения, имеющие одни и те же корни называют *равносильными уравнениями*, уравнения, не имеющие корней, также считаются равносильными.
При решении уравнений используются следующие свойства:

- Если в уравнении *перенести слагаемое* из одной части в другую, изменив знак, то получится уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения *умножить или разделить* на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

При решении задач с помощью уравнений поступают следующим образом:

- обозначают некоторое неизвестное число буквой и, используя условие задачи, составляют уравнение.
- Решают это уравнение.
- Истолковывают полученный результат в соответствии с условием задачи.

Система уравнений. Принято говорить, что несколько уравнений образуют систему, если во всех этих уравнениях каждая из букв ***x, y,*** . . означает одно и то же число для всех уравнений.
Если, напр., два уравнения:

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2 \\ 8x - y = 2y + 21 \end{cases}$$

рассматриваются при том условии, что буква ***x*** означает одно и то же число в обоих уравнениях, равным образом и буква ***y***, то такие уравнения образуют систему. Это бывает всякий раз в том случае, когда уравнения составлены из условий одной и той же задачи.
Укажем три способа решения системы 2 уравнений 1-й степени с 2 неизвестными. **Способ подстановки.** Рассмотрим пример:

$$8x - 5y = -16; \quad 10x + 3y = 17$$

(оба уравнения мы привели к нормальному виду).

Из одного уравнения, напр, из первого, определим одно какое-нибудь неизвестное, напр, ***x***, как функцию другого неизвестного:

$$x = \frac{5y - 16}{8}$$

Так как второе уравнение должно удовлетворяться теми же значениями, как и первое, то мы можем подставить в него вместо ***x*** найденное выражение, от чего получим уравнение с одним неизвестным ***y***:

$$10 \cdot \frac{5y - 16}{8} + 3y = 17$$

Решим это уравнение:

$$\frac{5(5y - 16)}{4} + 3y = 17; \quad 25y - 80 + 12y = 68; \quad 37y = 148; \quad y = 4;$$

тогда:

$$x = \frac{5y - 16}{8} = \frac{5 \cdot 4 - 16}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Мы могли бы определить из одного уравнения ***y*** как функцию от ***x*** и полученное выражение подставить на место ***y*** в другое уравнение; тогда мы получили бы уравнение с неизвестным ***x***.

Способ этот особенно удобен тогда, когда коэффициент при каком-нибудь неизвестном равен 1; тогда всего лучше определить это неизвестное как функцию другого неизвестного (не придется делить на коэффициент), и т. д.

Напр.:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x + y = 22. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим:

$$y = 22 - 4x.$$

Тогда первое уравнение дает:

$$3x - 2(22 - 4x) = 11; \quad 3x - 44 + 8x = 11; \; 11x = 44 + 11 = 55.$$

$$x = {}^{55}/_{11} = 5; \; y = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Правило. ***Чтобы решить систему двух уравнений с 2 неизвестными способом подстановки, надо определить из какого-нибудь уравнения одно неизвестное как функцию другого неизвестного и полученное выражение подставить в другое уравнение; от этого получается уравнение с одним неизвестным. Решив его, находят это неизвестное. Подставив найденное***

число в выражение, выведенное раньше для первого неизвестного, находят и это другое неизвестное.

Способ сложения или вычитания. Предположим сначала, что в данной системе уравнений (приведенных предварительно к нормальному виду) коэффициенты при каком-нибудь неизвестном, напр, при ***y***, будут одинаковы. При этом могут представиться два случая:
1) знаки перед такими коэффициентами разные и
2) знаки одинаковые. Рассмотрим эти два случая параллельно. Пусть, напр., даны две системы:

1 система:	2 система:
$\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 8y = 31 \\ 3x + 8y = 25. \end{cases}$

Если сложим почленно уравнения первой системы и вычтем почленно уравнения второй системы, то неизвестное у исключится:

$\begin{array}{l} \begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases} \\ \hline 12x \qquad = 60 \end{array}$	$\begin{array}{l} \begin{cases} 5x + 8y = 31 \\ -3x \pm 8y = -25 \end{cases} \\ \hline 2x \qquad = 6 \end{array}$

Откуда: ***x* = 5** ***x* =3**

Подставив в одно из данных уравнений вместо ***x*** найденное для него число, найдем ***y***:

$7 \cdot 5 - 2y = 27$ $y = 4$	$5 \cdot 3 + 8y = 31$ $y = 2$

Возьмем теперь систему, в которой коэффициенты различны, напр. такую:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 \\ -5x + 8y = 10. \end{cases}$$

Мы можем тогда предварительно уравнять коэффициенты при каком-нибудь одном неизвестном, напр, при ***x***. Для этого найдем кратное (лучше всего наименьшее) коэффициентов 7 и 5 (это будет 35) и умножим обе части каждого уравнения на соответствующий дополнительный множитель (как это делается при приведении дробей к общему знаменателю):

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 \text{ (на 5)} \\ -5x + 8y = 10 \text{ (на 7)} \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 35x + 30y = 145 \\ -35x + 56y = 70. \end{cases}$$

После этого остается только сложить или вычесть преобразованные уравнения. В нашем примере знаки перед коэффициентами ***x*** разные; поэтому уравнения надо сложить:

$$\begin{array}{r} 35x + 30y = 145 \\ -35x + 56y = 70 \\ \hline 86y = 215; \end{array} \quad y = \frac{215}{86} = 2^1/_2.$$

Теперь первое уравнение дает:

$$7x + 6 \bullet 2^1/_2 = 29; \quad 7x + 15 = 29; \quad 7x = 14; \; x = 2.$$

П р а в и л о. ***Чтобы решить систему двух уравнений с 2 неизвестными способом сложения или вычитания , надо сначала уравнять в обоих уравнениях коэффициенты при каком-нибудь одном неизвестном, а потом сложить оба уравнения, если знаки перед этими коэффициентами разные, или вычесть уравнения, если знаки одинаковые.***

Лекция №6

Решение текстовых задач с помощью составления неравенств и систем неравенств

- На выпускных экзаменах по математике часто предлагают задачи, в которых условие задано в форме некоторого текста, как правило, без формул и даже без буквенных обозначений неизвестных. Для решения таких задач на основе условий, предъявленных в тексте, требуется составить уравнения (неравенства) или систему уравнений (неравенств), а затем решить их. Интерес к таким задачам вполне понятен, они способствуют развитию логического мышления, умения самостоятельно проводить небольшие исследования.
- Текстовые задачи отличаются большим разнообразием содержания и могут существенно различаться по уровню сложности. Стандартные текстовые задачи, в которых условия записываются в виде уравнений, число которых равно числу неизвестных, обычно не вызывают особых затруднений, хотя и здесь могут встретиться непредвиденные сложности. Что же касается «нестандартных» по содержанию задач, то при их решении часто возникают трудности, объяснимые именно их непривычностью, необходимостью анализировать, рассуждать, а не просто формально решать системы уравнений или неравенств.

Приведу несколько советов, полезных при решении текстовых задач на составление уравнений и неравенств:

1. Внимательно, может быть не один раз, прочитайте условие задачи с тем, чтобы стало понятно ее содержание.
2. Часто бывает полезно сделать рисунок с отмеченными на нем числовыми данными.
3. При очередном прочтении задачи нужно постепенно вводить неизвестные, при необходимости отмечая их размерности. При этом буквенные обозначения неизвестных должны быть удобны, например, вызывать ассоциации со стандартными обозначениями в физике, химии и т.д. Выбор неизвестных должен быть, в первую очередь, удобен для математической записи условий задачи, а не ориентирован на ее вопрос.
4. При очередном прочтении задачи нужно записывать связи между известными и неизвестными величинами в виде уравнений и неравенств.
5. Перед решением системы уравнений или неравенств нужно определить искомую величину, имея ввиду, что часто из полученной системы требуется найти только одну неизвестную или некоторую комбинацию неизвестных, что может быть сделано далеко не всегда.

6. Если система допускает несколько решений, то проверить каждое из них. Чтобы учащиеся привыкли к задачам, требующих составления неравенств, я предлагаю им на уроке простые задачи. Их можно использовать для проверки теоретического материала, устного счета и т. д. Например:

Задача1. Одно из натуральных чисел на 4 меньше другого. Причем квадрат меньшего из чисел не больше, чем удвоенное второе число. Найдите меньшее число из данных чисел.

1. Что надо сделать, чтобы ответить на вопрос задачи? *(Построить ее математическую модель.)*
   $x2 \le 2(x + 4)$.
2. Что представляет математическая модель этой задачи? *(Неравенство).*
3. Что такое неравенство?
4. Какие виды неравенств вы знаете? *(Линейные неравенства, квадратные неравенства, рациональные неравенства, неравенства, содержащие знак модуля).*
5. Что называется решением неравенства? *(Значение переменной x, которое обращает неравенство $f(x) > 0$ в верное числовое неравенство, называют решением неравенства).*
6. Что значит решить неравенство? *(Решить неравенство, значит найти все его решения или доказать, что их нет).*
7. Какие правила используют при решении неравенств? *(Правила равносильных преобразований).*
8. К какому виду относится данное неравенство? *(Квадратное)*
9. Какие методы решения квадратных неравенств вы знаете? Решите полученное неравенство.
   Текстовые задачи традиционно вызывают затруднения у школьников, многим из которых не удается правильно составить уравнение или неравенство по условию задачи. Учителю математики в такой ситуации почти невозможно организовать самостоятельную работу школьников, постоянно нуждающихся в указаниях и подсказках. Поэтому на уроках я предлагаю таким ученикам карточки с задачами, которые сопровождаются указаниями, следуя которым даже слабый ученик сможет получить правильный ответ, а для сильных учеников предусмотрены дополнительные вопросы. Например:
   Задача 2. Сплав олова и меди, масса которого 16 кг, содержит 55% олова. Сколько килограммов олова нужно добавить, чтобы повысить содержание олова в сплаве до 60%?
   Решение.
   Обозначив искомую массу олова буквой *x*, выразите:

а) сколько килограммов олова было в сплаве сначала;

б) сколько килограммов олова стало в сплаве после добавления;

в) массу полученного сплава;

г) отношение массы олова к массе полученного сплава.

Запишите уравнение, решите его и ответьте на вопрос задачи.
Дополнительные вопросы.

1. Какова масса меди, содержащейся в сплаве?
2. Сколько килограммов меди следовало бы добавить в первоначальный сплав, чтобы содержание меди составило 50%?
   Задачи на уроке предлагаются по нарастающему уровню сложности, самые трудные можно предложить на факультативных занятиях.

Задача 3.Две трубы, действуя вместе в течение одного часа, наполняют водой 3/8 бассейна. Если сначала первая труба наполнит одну восьмую часть бассейна, а затем вторая при выключенной первой доведет объем до 3/8 бассейна, то на это потребуется 2,5 часа, если первую трубу включить на час, а вторую – на полчаса, то они наполнят бассейн более чем на четверть. За какое время наполняет бассейн каждая труба?

Ход решения.

1. Составление математической модели.

x л/час – производительность первой трубы;

y л/час – производительность второй трубы;

V л – объем бассейна.

Тогда условие задачи можно записать следующим образом

$$\mathrm{x} + \mathrm{y} = \frac{3}{8}\,\mathrm{V},$$

$$\frac{V}{8x} + \frac{V}{4y} = \frac{5}{2} \qquad x + \frac{1}{2}y > \frac{V}{4}$$

t = V/x, T = V/y. Тогда систему можно переписать так

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{T} = \dfrac{3}{8} \\ t + 2T = 20 \\ \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2T} > \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Математическая модель готова.

2. Работа с математической моделью.

1) Из второго уравнения имеем $t = 20 - 2T$.

2) Подставляем в первое уравнение, получаем уравнение относительно Т

$3T^2 - 34T + 80 = 0.$

Корни данного уравнения: Т = 8 или Т = 10/3.

3) Тогда решениями данной системы первых двух уравнений являются

$t_1 = 4, T_1 = 8$ и $t_2 = \frac{40}{3}, T_2 = \frac{10}{3}$

Последнему неравенству системы удовлетворяет лишь первое решение.

3. Ответ на вопрос задачи.

Первая труба заполнит бассейн за 4 часа, а вторая – за 8 часов.

Ответ: 4 часа, 8 часов.

Задача 4.

Из города А в 9 часов утра выехал велосипедист и двигался с постоянной скоростью 12 км/ч. Спустя 2 часа вслед за ним из А выехал мотоциклист, который при начальной скорости 22 км/ч двигался равнозамедленно, так, что за час его скорость уменьшается на 2 км/ч. Автомобилист, едущий им навстречу в город А с постоянной скоростью 50 км/ч, сначала встретил мотоциклиста, а потом велосипедиста. Успеет ли автомобилист к 19 часам этого дня прибыть в город А?

Ход решения.

1. Составление математической модели.

По условию задачи автомобилист встретит сначала мотоциклиста, а затем велосипедист. Следовательно, мотоциклист некоторый участок пути пройдет впереди велосипедиста. Именно на этом участке пути произойдут их встречи с автомобилистом. Найдем этот участок.

Пусть х ч – время, отсчитываемое от 9 часов утра, тогда

12х км – путь пройденный велосипедистом,

$22(x-2)-2\frac{(x-2)^2}{2}$ - км – путь пройденный мотоциклистом.

Приравнивая эти два пути, найдем соответствующие значения х, при которых мотоциклист и велосипедист обгонят друг друга.

12 х = $22(x-2)-2\frac{(x-2)^2}{2}$ -

2. Работа с математической моделью

12 х = $22(x-2)-2\frac{(x-2)^2}{2}$ -

t2 – 14t + 48 = 0,
t1 = 6, t2 = 8.

3. Ответ на вопрос задачи.

Следовательно, мотоциклист обгонит велосипедиста в 15 часов дня на расстоянии 72 км от города А, а затем велосипедист обгонит мотоциклиста в 17 часов на расстоянии 96 км от города А. Итак, автомобилист, двигающийся со скоростью50 км/ч, ранее 17 часов был на расстоянии менее 96 км от города А, следовательно, он успеет к 19 часам прибыть в город А.

Ответ. *Успеет.*

Задача 5.

Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 18 км, в 8 часов выходит пешеход, в 11 часов выезжает велосипедист. Известно, что пешеход прибыл в пункт В не позже, чем в 12 часов 30 минут, а велосипедист прибыл в пункт В не позже пешехода. Считая скорости пешехода и велосипедиста постоянными, определить скорость велосипедиста, если она не более, чем на 8 км/ч превышает скорость пешехода.

Ход решения.

1. Составление математической модели.

Необычность условий этой задачи состоит в том, что на их основе нельзя составить ни одного уравнения, а решение сводится к рассмотрению системы неравенств.

х км/ч – скорость велосипедиста,

a км/ч – разность скоростей велосипедиста и пешехода,

(х – *a)* км/ч – скорость пешехода. Тогда получим

$$\begin{cases} x - a > 0, \\ \dfrac{18}{x-a} \le \dfrac{9}{2} \\ 3 + \dfrac{18}{x} \le \dfrac{18}{x-a} \\ 0 < a < 8 \end{cases}$$

2. Работа с математической моделью.

$$\begin{cases} x > a > 0, \\ \dfrac{(x-a-4)}{x-a} \ge 0 \\ \dfrac{x^2 - ax - 6a}{x(x-a)} \le 0 \\ 0 < a \le 8 \end{cases}$$

Из второго неравенства, учитывая первое, получим

$x \ge a + 4.$

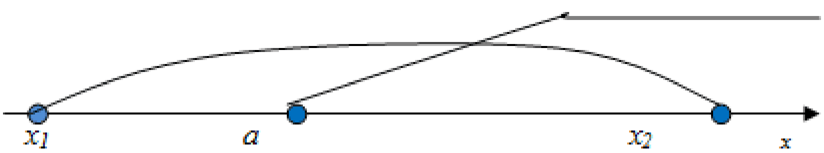
Рассмотрим третье неравенство.

Корни квадратного трехчлена $x2 - ax - 6a$

есть

$x1,2 = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 24a})$

Применяя метод интервалов с учетом первого неравенства, получим



$a < x < \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 24a})$

Объединяя результаты, имеем, что значение x должно удовлетворять следующему неравенству

$a + 4 \le x \le \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 24a})$

Чтобы существовали такие значения x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$a + 4 \le x \le \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 24a})$

или $a + 8 \le \sqrt{a^2 + 24a}$,

откуда $a \ge 8$.

Учитывая, что по условию $a \le 8$, получим, что $a = 8$. При этом последнее неравенство для x дает

$12 \le x \le 0,5(8 + \sqrt{256}) = 12$
откуда x = 12.

3. Ответ на вопрос задачи.

Скорость велосипедиста 12 км/ч.

Ответ: *12 км/ч*

Задача 6.На реке, скорость течения которой равна 4 км/ч, в направлении её течения расположены пристани A, B, C, причем расстояние от A до B вдвое меньше, чем расстояние от B до C. От пристани B в один и тот же момент по направлению к пристани C отправлены плот (плывущий относительно берегов со скоростью течения реки) и катер. Дойдя до пристани C, катер разворачивается и движется по направлению к пристани A. Найти все значения собственной скорости катера (т. е. скорости катера в стоячей воде), при которых катер приходит в пункт A не раньше, чем плот приходит в пункт C.

Ход решения:

1. Составление математической модели.

Пусть x км/ч – скорость катера в стоячей воде,

y км - расстояние от пристани A до пристани B.

$\frac{2y}{4}$ ч – время движения катера из В в С,

$\frac{2y}{x+4} + \frac{3y}{x-4}$ - время движения катера из В в С и обратно из С в А против течения.

По условию $\frac{2y}{x+4} + \frac{3y}{x-4} \geq \frac{2y}{4}$.

2. Работа с математической моделью.

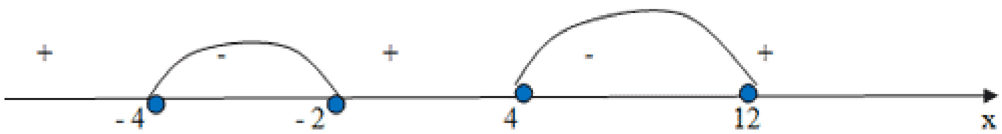
$$\frac{2y}{x+4} + \frac{3y}{x-4} \geq \frac{2y}{4}.$$

$$\frac{2}{x+4} + \frac{3}{x-4} \geq \frac{1}{2},$$

$$\frac{x^2-10x-24}{(x-4)(x-4)} \leq 0$$

$$\frac{(x-12)(x+2)}{(x+4)(x-4)} \leq 0$$

Применим метод интервалов, учитывая, что х > 4.



Получим, что 4 < x ≤ 12.

3. **Ответ на вопрос задачи.**

Собственная скорость движения катера в стоячей воде должна быть в интервале (4; 12] км/ч.

Ответ: *(4; 12] км/ч.*

Лекция №7

Задачи «на смеси и сплавы» с решениями.

Довольно часто приходится смешивать различные жидкости, порошки, разбавлять что-либо водой или наблюдать испарение воды. В задачах такого типа эти операции приходится проводить мысленно и выполнять расчёты. Итак, пусть смесь массы M содержит некоторое вещество массой m. Тогда:

- концентрацией данного вещества в смеси (сплаве) называется величина c=m/M;
- процентным содержанием данного вещества называется величина c?100%;

Из последней формулы следует, что при известных величинах концентрации вещества и общей массы смеси (сплава) масса данного вещества определяется по формуле $m=c?M$.

Задачи на смеси (сплавы) можно разделить на два вида:

1. Задаются, например, две смеси (сплава) с массами m_1 и m_2 и с концентрациями в них некоторого вещества, равными соответственно c_1 и c_2. Смеси (сплавы) сливают (сплавляют). Требуется определить массу этого вещества в новой смеси (сплаве) и его новую концентрацию. Ясно, что в новой смеси (сплаве) масса данного вещества равна $c_1m_1+c_2m_2$, а концентрация $c=(c_1m_1+c_2m_2)/(m_1+m_2)$.
2. Задается некоторый объем смеси (сплава) и от этого объема начинают отливать (убирать) определенное количество смеси (сплава), а затем доливать (добавлять) такое же или другое количество смеси (сплава) с такой же концентрацией данного вещества или с другой концентрацией. Эта операция проводится несколько раз.

При решении таких задач необходимо установить контроль за количеством данного вещества и его концентрацией при каждом отливе, а также при каждом доливе смеси. В результате такого контроля получаем разрешающее уравнение. Рассмотрим конкретные задачи.
Задача №1. Из сосуда ёмкостью 54 литра, наполненного кислотой, вылили несколько литров и доли сосуд водой. Потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 литра чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?
Решение. Пусть х литров кислоты вылили в первый раз. Тогда в сосуде осталось (54-х) литров. Долив сосуд водой, получим 54 литра смеси, в которой растворилось (54-х) литров кислоты. Значит в одном литре смеси содержится (54-х)/54литров кислоты. Всего за два раза вылили 54-24=30 литров кислоты. В результате получили уравнение: х+х(54-х)/54=30
Решив это уравнение, найдём два корня: х=90 и х=18. Ясно, что значение 90

не удовлетворяет условию задачи.
Ответ: в первый раз было вылито 18 литров воды.
При решении задач на смеси считается, что рассматриваемые смеси однородны: не делается различия между литром как единицей массы и как единицей ёмкости. Концентрацией вещества называется отношение массы этого вещества к массе всей смеси (раствора, сплава). Концентрация вещества, выраженная в процентах, называется процентным отношением вещества в смеси (растворе, сплаве).

Задача №2. В каких пропорциях нужно смешать раствор 50%-й и 70%-й кислоты, чтобы получить раствор 65%-й кислоты?
Решение.
<u>1 способ</u>

Пусть x г – масса 50%-й кислоты, y г – масса 70%-й кислоты, 0,5x г – масса чистой кислоты в первом растворе, (x+y)г – масса смеси, 0,65(x+y)г - масса чистой кислоты в смеси. Составим уравнение :

$0,5x+0,7y=0,65(x+y)$

Получаем соотношение 1:3.

Ответ: 1:3.

Существует и другой способ решения этой задачи. Он называется арифметическим (или старинным) способом.

<u>2 способ</u>

Обоснуем старинный способ решения задач «на смеси».

Пусть требуется смешать растворы a%-й и b%-й кислот, чтобы получить

c%-й раствор.

Пусть x г – масса a%-го раствора, y г – масса b%-го раствора, ax/100 г – масса чистой кислоты в первом растворе, а by/100 г – масса чистой кислоты во втором растворе, c(x+y)/100 г – масса чистой кислоты в смеси.

$ax/100+by/100=c(x+y)/100$

,при упрощении которого станет ясно, что $x:y=(b-c):(c-a)$.

Задача №3. Имеется два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определите, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.

Решение.Пусть x кг – количество олова в новом сплаве. Так как новый сплав весит 400 кг и в нём находится 30 % цинка, то он содержит 400*30/100=120 кг, а во втором сплаве (120-у) кг цинка. По условию задачи процентное содержание цинка в двух сплавах равно, следовательно, можно составить уравнение: 100у/150=100(120-у)/250

Из этого уравнения находим, что у=45. Поскольку первый сплав содержит 40% олова, то в 150 кг первого сплава олова будет 150*40/100=60 кг, а во втором сплаве олова будет (х-60) кг. Поскольку второй сплав содержит 26% меди, то во втором сплаве меди будет 250*26/100=65 кг. Во втором сплаве олова содержится (х-60) кг, цинка 120-45=75 (кг), меди 65 кг и, так как весь сплав весит 250 кг, то имеем:
х-60+75+65=250, откуда х=170 кг
Ответ: 170 кг.

Задача №4.В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5 % железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20 %. Определите, какое количество железа осталось ещё в руде?
Решение.

Сначала составим таблицу, в которой напишем массу руды, массу железа, концентрацию (долю железа в руде напишем массу руды, массу железа, концентрацию (доля железа) руде?

	Масса руды, кг	Масса железа, кг	Концентрация (доля железа в руде)
Руда	500	x	x/500
Руда после удаления примесей	500-200=300	x-0,125?200=x-25	(x-25)/300

Пусть x кг – масса железа в руде. Так как масса всей руды равна 500 кг, то концентрация железа в ней равна x/500%.

Так как масса железа в 200 кг примесей равна 0,125?200=25 (кг), то его масса в руде после удаления примесей равна (x-25) кг. Из того, что масса оставшейся руды равна 500-200=300 кг следует, что концентрация железа в ней равна (x-25)/300.

По условию, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20%=1/5. Составим уравнение:

$(x-25)/300-1/5=x/500$,

$5(x-25)-300=3x$

$x=212,5$

Найдём, что $x=212,5$ кг – масса железа в руде.

Найдём остаток железа в руде после удаления примесей:

$212,5-25=187,5$ (кг)

Ответ: 187,5 кг.

Мы решили вторую задачу путём составления таблицы, помогающей зрительно воспринимать задачу.

Вывод: задачи «на смеси и сплавы» решаются множеством способов, но в них всегда присутствует концентрация (доля содержания одного вещества в другом), и они всегда решаются путём составления уравнений.

Лекция №8

Решение задач на арифметическую прогрессию

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с постоянным для данной последовательности числом. Это постоянное число называется **разностью** арифметической прогрессии и обозначается обычно буквой *d*. Арифметическая прогрессия называется **возрастающей**, если $d > 0$ и **убывающей,** если $d < 0$.

Таким образом, арифметическая прогрессия задается рекуррентным соотношением $a_n = a_{n-1} + d$ и первым членом a_1.

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии:

Числовая последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой член этой последовательности, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n \ge 2$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии обычно обозначается S_n и вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

При решении задач, связанных с арифметической прогрессией, могут оказаться полезными также следующие формулы:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

$$S_n = \frac{2a_n - d(n-1)}{2} n$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},\ k < n$$

$$a_k + a_n = a_{k-m} + a_{n+m},\ m < k$$

$$d = \frac{a_n - a_k}{n-k}$$

Пример 1. Том Сойер красил забор длиной 105 м, причем день за днем количество выкрашенного за день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был выкрашен забор, если за первые три дня Том выкрасил 36 м забора, а за последние три дня – 27 м?

Пример 2. Несколько косцов подрядились выкосить луг и выполнили бы работу за 8 часов, если бы косили все одновременно. Вместо этого они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый косил до окончания всей работы. За какое время был выкошен луг, если косец, приступивший к работе первым, проработал в семь раз дольше, чем последний?

Пример 3. Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.
Решение.
Пусть a_1 — первый член арифметической прогрессии,*d* — разность прогрессии. Тогда, по условию, $a_1 + 2d + a_1 + 4d = 8 \Leftrightarrow a_1 + 3d = 4$. Сумма первых семи членов
$S_7 = \frac{2a_1+6d}{2} * 7 = 7(a_1+3d) = 7*4 = 28.$
Ответ: 28.

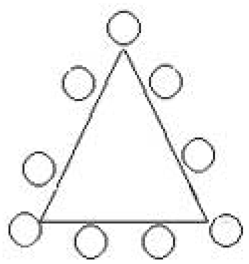
Лекция №9

Решение нестандартных задач

При решении таких задач можно посоветовать следующее:

1. Внимательно прочтите задачу, обдумайте поставленный вопрос, чётко представьте тот предмет или явление, о котором в нём говорится.
2. Обдумайте связи, которые существуют между данными в условии и вопросе задачи. Возможно, характер этой связи подскажет вам способ решения задачи.
3. Вспомните, не встречалась ли вам похожая задача, способ решения которой вам известен.
4. Попробуйте, упростив условие задачи, найти принцип её решения, а затем применить этот принцип для решения исходной задачи.
5. Если в задаче несколько неизвестных, попробуйте разбить условие на несколько подзадач с одним неизвестным в каждой.
6. Подумайте, какие части условия несущественны и только сбивают вас с толку.
7. Подумайте, нельзя ли применить для решения задачи какие-либо знания из другой сферы деятельности.
8. Подумайте, нельзя ли рассмотреть ситуацию в задаче с другой точки зрения ("надо поднять груз на платформу а нельзя ли опустить платформу под груз").
9. Попробуйте с помощью конкретных примеров нащупать общее решение задачи.
10. Обязательно сделайте проверку полученного ответа, сопоставив его с жизненными представлениями об искомой величине или подставив эту величину в условие задачи

Задача 1. Расставить вдоль сторон цифры



Расставить вдоль сторон треугольника цифры **1, 2, 3,…, 9** так, чтобы сумма цифр вдоль каждой стороны равнялась 20-ти.

Цифра, стоящая в вершине треугольника, принадлежит каждой из сторон, выходящих из этой вершины.

Задача 2. Высота башни

Допустим, в Вашем городе есть достопримечательность - высокая башня, высоты которой Вы не знаете. Имеется у Вас и фотоснимок этой башни. Как может этот снимок помочь Вам узнать высоту башни?

Ответ: Чтобы по снимку определить высоту натуральной башни, нужно прежде всего измерить возможно точнее высоту башни и длину ее основания на фотографии. Предположим, высота на снимке 95 мм, а длина основания - 19 мм. Тогда Вы измеряете длину основания натуральной башни; допустим, она оказалась равной 14 м.
Теперь рассуждаем. Фотография башни и ее подлинные очертания геометрически подобны друг другу. Следовательно, во сколько раз изображение высоты больше изображения основания, во столько же раз высота натуральной башни больше длины ее основания. Первое отношение равно 95:19, т.е. 5; отсюда, высота натуральной башни равна 14*5 = 70 м.

Литература для учителя

1. Варшавский И.К., Гаиашвили М.Я., Глазков Ю.А. Текстовые задачи на Едином государственном экзамене. // Математика для школьников, №3, 2005
2. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Учебное пособие для учащихся 7-11 классов. – Челябинск.Взгляд, 2005
3. Дорофеев В.Г. Математика для поступающих в ВУЗы; Пособие /В.Г.Дорофеев, Л.В. Кузнецова, Е.А.Седова – М.:Дрофа, 2001
4. Ерина Т.М. Задачи на движение. //Математика для школьников, № 3, 2005
5. Захарова А.Е. Несколько задач «про цены» // Математика в школе, №8, 2002
6. Захарова А.Е. Учимся решать задачи на смеси и сплавы. // Математика для школьников, №3, 2006
7. Звавич Л.И. Задания для подготовки к письменному экзамену по математике в 9 классе: пособие для учителя – М.Просвещение, 2001
8. Кузнецова Л.В. Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: 9 кл. – М.: Дрофа ,2009
9. Семенов А.Л., Ященко И.В.Математика. Типовые экзаменационные варианты. – М.Национальное образование, 2011
10. Шевкин А.В. Сборник задач. 5-6 класс. – М.: ИЛЕКСА, 2011
11. Шевкин А.В. Сборник задач. 7-11 класс. – М.: ИЛЕКСА, 2011